Controle 2

10 septembre 2012

1. Calculer $Det\begin{pmatrix} -26 & 3 & -3 \\ -21 & 1 & 9 \\ 20 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   Le résultat est 2010.

2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$

   Solution : En multiplient les deux matrices on tombe sur l'égalité $\begin{pmatrix} a+2b & 3a-4b \\ -2 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$ Ce qui équivaut donc au système : $\begin{matrix} a+2b = & 11 \\ 3a-4b = & 3 \end{matrix}$ On résout ce système et on trouve qu'il existe une unique solution : $a = 5$, $b = 3$.

3. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq c$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a & b\frac{a^n-c^n}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

   Solution : On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 1$.
   Pour initialiser la récurrence, on montre le résultat pour $n = 1$, qui découle du fait que pour $n = 1$ on a $b\frac{a^n-c^n}{a-c} = b.1 = b$.
   Si on suppose le résultat vrai pour $n \geq 1$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & b\frac{a^n-c^n}{a-c} \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + cb\frac{a^n-c^n}{a-c} \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(\frac{a^n(a-c)}{a-c} + c\frac{a^n-c^n}{a-c}) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a^{n+1} & b\frac{a^{n+1}-a^nc+ca^n-c^{n+1}}{a-c} \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b\frac{a^{n+1}-c^{n+1}}{a-c} \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$. Ce qui achève la récurrence.

4. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ on pose $T(A) = a + d$. Montrer que pour tout $B, C \in M_2(\mathbb{C})$ on a $T(B.C) = T(C.B)$.

   Solution : On pose $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ de même pour C. Alors $B.C =$ $\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} b_{1,1}c_{1,1} + b_{1,2}c_{2,1} & * \\ * & b_{2,1}c_{1,2} + b_{2,2}.c_{2,2} \end{pmatrix}$
Ainsi $T(B.C) = b_{1,1}c_{1,1} + b_{1,2}c_{2,1} + b_{2,1}c_{1,2} + b_{2,2}c_{2,2}$. De même $C.B = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1}b_{1,1} + c_{1,2}b_{2,1} & * \\ * & c_{2,1}b_{1,2} + c_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$. On obtient donc aussi $T(C.B) = b_{1,1}c_{1,1} + b_{1,2}c_{2,1} + b_{2,1}c_{1,2} + b_{2,2}c_{2,2}$.